ホッジ構造に関する書き留め

2026 年 4 月 26 日 12 時 54 分更新

本稿は，[1] を参考にして，ケーラー多様体上のホッジ構造を，なるべく最短で理解する試みを書き留めたものです。多様体に関する知識は [2] に基づきます。

目　次

約束

1. 整数すべてがなす環を $\mathbf{Z}$，実数体を $\mathbf{R}$，複素数体を $\mathbf{C}$ で表し，自然な埋め込みによって $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ となっていると考える。
2. $\mathbf{C}$ 内の虚数単位を一つ固定し，i で表すことにする。
3. 複素数 z の実部を $\Re z$，虚部を $\Im z$ で表す。

1　線形代数に関する準備

V を有限次元 $\mathbf{R}$ 線形空間とし，$V_{\mathbf{C}} \coloneqq V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$，$W \coloneqq \hom_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{R})$，$W_{\mathbf{C}} \coloneqq \hom_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{C})$ と置く。慣習に習って，$V_{\mathbf{C}}$ の元 $u \otimes 1 + v \otimes i$ を $u + iv$ と書くことにする。

命題 1.1　$W_{\mathbf{C}}$ に対して以下の二つの線形同型がある。

(1)　$W_{\mathbf{C}}$ の元 f は，W の元 g, h を用いて

$$f = g + ih = (u \mapsto g(u) + ih(u))$$

と一意的に表される。したがって線形同型 $W_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\sim} W \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$; $f \mapsto g \otimes 1 + h \otimes i$ がある。

(2)　$W_{\mathbf{C}}$ の元 f に対して，

$$\widetilde{f}\,(u \otimes z) \coloneqq z f(u)$$

と拡張して，$\hom_{\mathbf{C}}(V_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ の元 $\widetilde{f}$ を与えられる。さらに写像 $W_{\mathbf{C}} \to \hom_{\mathbf{C}}(V_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$; $f \mapsto \widetilde{f}$ は線形同型で，逆写像は $f \mapsto f|_V = (u \mapsto f(u \otimes 1))$ で与えられる。

証明　(1) について。元 $f \in W_{\mathbf{C}}$ に対して，$g \coloneqq \Re f$，$h \coloneqq \Im f$ とすれば目的の表示 $f = g + ih$ を得られる。詳細は省略する。

(2) について。はじめに $\widetilde{f}$ が well-defined であることをみる。写像 $F\colon V \times \mathbf{C};\ (u, z) \mapsto zf(u)$ は $\mathbf{R}$ 双線形写像であるから，$\mathbf{R}$ 線形写像 $\tilde{f}\colon V_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ が誘導され，ベクトル $u \in V$，複素数 $z, z' \in \mathbf{C}$ に対して $\widetilde{f}(z'(u \otimes z)) = \widetilde{f}(u \otimes (z'z)) = z'zf(u) = z'\widetilde{f}(u \otimes z)$ と計算できるので，$\widetilde{f}$ は $\mathbf{C}$ 線形写像でもある，すなわち $\widetilde{f} \in \hom_{\mathbf{C}}(V_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ である。写像 $f \mapsto \widetilde{f}$ が $\mathbf{C}$ 線形写像であることに注意する。逆の写像を与えよう。元 $f \in \hom_{\mathbf{C}}(V_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ に対して，制限 $f|_V\colon V \to \mathbf{C};\ u \mapsto f(u \otimes 1)$ を考えると，$f|_V \in W_{\mathbf{C}}$ である。構成から，元 $f \in W_{\mathbf{C}}$ に対して $(\widetilde{f})|_V = f$ となるこをみるのは易しい。逆の合成を考えるため，元 $f \in \hom_{\mathbf{C}}(V_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ を取ると，勝手なベクトル $u \in V$ と複素数 $z \in \mathbf{C}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(f|_V)^{\sim}(u \otimes z) &= z(f|_V)(u) && \because 拡張の定義\\
&= zf(u \otimes 1) && \because 制限の定義\\
&= f(u \otimes z) && \because \mathbf{C}\ 線形性
\end{aligned}
$$

と計算でき，$(f|_V)^{\sim} = f$ であることもわかった。ゆえに写像 $f \mapsto \widetilde{f}$ は $\mathbf{C}$ 線形同型である。

証明終

注意 1.2　双対空間を $*$ を付けて表すならば，この命題は，標準的な $\mathbf{C}$ 線形同型 $V^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong (V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})^*$ があることを示している。

この節の冒頭で述べた通り，以降では，$V_{\mathbf{C}}$ の元 $u \otimes 1 + v \otimes i$ を $u + iv$ と書くことにする。

定義 1.3　$I^2 = -\mathrm{id}_V$ を満足する $\mathbf{R}$ 線形写像 $I\colon V \to V$ を V の**複素構造**と呼ぶ。

観察 1.4　$I\colon V \to V$ を V の複素構造とする。

(1)　複素数 $a + bi$ に対して，$(a + bi)u \coloneqq au + bIu$ と定めることで，V に $\mathbf{C}$ 線形空間の構造が入る。

(2)　V の基底を取って，I を $\dim_{\mathbf{R}} V$ 次正方行列とみるとき，$\det(I)^2 = (-1)^{\dim_{\mathbf{R}} V}$ となるので，$\dim_{\mathbf{R}} V$ は偶数でなければならない。

(3)　偶数次元 $\mathbf{R}$ 線形空間 V には，少なくとも一つの複素構造が定まる。なんとなれば，基底 $e_1, e_1', \dots, e_n, e_n'$ を取って，行列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{\oplus n}$ で表現される線形写像 I を誘導すると，この I が V の複素構造だからである。

(4)　V が $\mathbf{C}$ 線型空間であるとき，$Iu \coloneqq iu$ とすることで，V の概複素構造 I を得られる。

(5)　不定元 t に関する多項式 $t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$ が I の最小多項式であるから，$\{i, -i\}$ が I の固有値のすべてであり，i の固有空間を $V^{1,0}$，$-i$ の固有空間を $V^{0,1}$ で表すとき，

分解

$$V_{\mathbf{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \tag{1.1}$$

が得られる。具体的に表せば

$$V^{1,0} = \{\, u - iIu : u \in V \,\}, \qquad V^{0,1} = \{\, u + iIu : i \in V \,\}$$

と書ける。

命題 1.5　分解 (1.1) に対して双対を取って分解

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(V_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \cong \mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(V^{1,0}, \mathbf{C}) \oplus \mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(V^{0,1}, \mathbf{C}) \tag{1.2}$$

を考える。さらに命題 1.1 を用いることで $W_{\mathbf{C}}$ を分解し，$\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(V^{1,0}, \mathbf{C})$ に対応する $W_{\mathbf{C}}$ の部分空間を $W^{1,0}$，$\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(V^{0,1}, \mathbf{C})$ に対応する $W_{\mathbf{C}}$ の部分空間を $W^{0,1}$ で表すことにする。このとき $W^{1,0}$ の元は $\mathbf{C}$ 線形写像で，$W^{0,1}$ の元は反線形写像である。

証明　$W^{1,0}$ について考える。元 $f \in W^{1,0}$ を取り，$\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(V_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ の元と考えるとき，勝手なベクトル $u \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
f(u) &= f\Big(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u\Big) \\
&= f\Big(\frac{1}{2}(u - iIu) + \frac{1}{2}(u + iIu)\Big) && \because (1/2)iIu \text{ を挟み込んだ} \\
&= f\Big(\frac{1}{2}(u - iIu)\Big) && \because \text{分解 (1.2) より} \\
&= \frac{1}{2}f(u) - \frac{i}{2}f(Iu)
\end{aligned}$$

と計算でき，$f(u) = -if(Iu)$ が勝手なベクトル $u \in V$ に対して成立する。特に勝手なベクトル $v \in V$ に対して，$u = Iv$ と考えることで，$f(Iv) = if(v)$ となる。標準な線形同型から，$W_{\mathbf{C}}$ の元としてもこの等式は成立する，すなわち f は $\mathbf{C}$ 線形写像である。

$W^{0,1}$ についても，元 $f \in W^{0,1}$ を取り，$\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(V_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ の元と考えれば，勝手なベクトル $u \in V$ に対して $f(u) = if(Iu)$ が成立し，従って勝手なベクトル $v \in V$ に対して $f(Iv) = -if(v)$ が成立し，反線形写像であることが確かめられる。　証明終

定義 1.6　分解

$$W_{\mathbf{C}} = W^{1,0} \oplus W^{0,1}$$

のうち，$W^{1,0}$ を $\mathbf{C}$ **線形部分**，$W^{0,1}$ を**反線形部分**と呼ぶ。

1.1 複素平面の接空間の場合

前節で展開した線形空間の複素構造の議論を $\mathbf{C}$ の接空間に対して当てはめてみる。ユークリッド位相の意味での開集合 $U \subset \mathbf{C}$ を考える。複素数の表示 $z = x + iy$ を以て，2 次元実多様体としての U の座標を取る。したがって点 $u \in U$ に対して，u における接空間 $T_{U,u}$ は

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)_u, \quad \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)_u$$

を基底として持つ 2 次元実線形空間である。観察 1.4 (3) のようにして，

$$I\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad I\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}$$

として複素構造 $I\colon T_{U,u} \to T_{U,u}$ を定めておく。

定義 1.7 点 $u \in U$ とに対して，余接ベクトル

$$(d\,z)_u \coloneqq (d\,x)_u + i(d\,y)_u, \qquad (d\,\bar{z})_u \coloneqq (d\,x)_u - i(d\,y)_u$$

を与えて，複素数値 1 形式 $d\,z,\, d\,\bar{z} \in \Omega_{U,\mathbf{C}} \coloneqq \hom_{\mathbf{R}}(T_U, \mathbf{C}) \cong \Omega_{U,\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ を定める。ここで，$\hom_{\mathbf{R}}(T_U, \mathbf{C})$ は各ファイバーに制限すると $\mathbf{R}$ 線形写像 $T_{U,u} \to \mathbf{C}$ を誘導する滑らかな写像 $T_U \to \mathbf{C}$ の集合を表し，$\Omega_{U,\mathbf{R}}$ は T_U^* の滑らかな切断がなす $\mathbf{R}$ 線形空間を表す。

観察 1.8 (1) U 上の切断として

$$d\,x = \frac{1}{2}(d\,z + d\,\bar{z}), \qquad d\,y = -\frac{i}{2}(d\,z - d\,\bar{z}) \tag{1.3}$$

と表せるので，$(d\,z)_u, (d\,\bar{z})_u$ は $(\Omega_{U,\mathbf{C}})_u$ の $\mathbf{C}$ 上の基底をなす。

(2) $d\,z$ は I による複素構造の下 $\mathbf{C}$ 線形，かつ $d\,\bar{z}$ は反線形である。なんとなれば，基底ベクトルに対して

$$\begin{aligned}
d\,z\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) &= d\,z\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big) = i = i\,d\,z\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\\
d\,z\Big(i\frac{\partial}{\partial y}\Big) &= d\,z\Big(-\frac{\partial}{\partial x}\Big) = -1 = i\,d\,z\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)\\
d\,\bar{z}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) &= d\,\bar{z}\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big) = -i = (-i)\,d\,z\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\\
d\,\bar{z}\Big(i\frac{\partial}{\partial y}\Big) &= d\,\bar{z}\Big(-\frac{\partial}{\partial x}\Big) = -1 = (-i)\,d\,z\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)
\end{aligned}$$

と計算できるからである。ゆえに $(\Omega_{U,\mathbf{C}})_u$ の $\mathbf{C}$ 線形部分を $\Omega^{1,0}_{U,u}$，反線形部分を $\Omega^{0,1}_{U,u}$ で表すことにすると，$d\,z$ が $\Omega^{1,0}_{U,u}$ の基底をなし，$d\,\bar{z}$ が $\Omega^{0,1}_{U,u}$ の基底をなす。

滑らかな複素数値関数 $f = g + ih\colon U \to \mathbf{C}$ を考える。$\Omega^0_{U,\mathbf{R}}$ を U 上の滑らかな実数値関数とするとき，f を $\Omega^0_{U,\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の元 $g \otimes 1 + h \otimes i$ とみなせる。外微分 $d\colon \Omega^0_{U,\mathbf{R}} \to \Omega_{U,\mathbf{R}}$ を $\mathbf{C}$ に係数したものを用いると，

$$
\begin{aligned}
d\,f &= \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial g}{\partial y}\,d\,y\Big) + i\Big(\frac{\partial h}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial h}{\partial y}\,d\,y\Big) \\
&= \Big(\frac{\partial h}{\partial x}\,d\,x + i\frac{\partial h}{\partial x}\Big)d\,x + \Big(\frac{\partial h}{\partial y}\,d\,x + i\frac{\partial h}{\partial y}\Big)d\,y
\end{aligned}
$$

となる。さらに

$$
\frac{\partial f}{\partial x} \coloneqq \frac{\partial h}{\partial x}\,d\,x + i\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \coloneqq \frac{\partial h}{\partial y}\,d\,x + i\frac{\partial h}{\partial y}
$$

と置けば,

$$
d\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial f}{\partial y}\,d\,y
$$

とも書ける。さらに (1.3) を用いれば,

$$
d\,f = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)d\,z + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)d\,\bar{z} \tag{1.4}
$$

と表せる。各点 $u \in U$ で $(d\,z)_u, (d\,\bar{z})_u$ が $(\Omega_{U,\mathbf{C}})_u$ の基底であるから，$d\,z$ と $d\,\bar{z}$ の係数に現れる関数は一意に定まる。

定義 1.9　滑らかな複素数値関数 $f\colon U \to \mathbf{C}$ を考える。

$$
\frac{\partial f}{\partial z} \coloneqq \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \coloneqq \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)
$$

と定める。よって (1.4) は

$$
d\,f = \frac{\partial f}{\partial z}\,d\,z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\,\bar{z}
$$

と表せる。

命題 1.10　滑らかな複素数値関数 $f\colon U \to \mathbf{C}$ が点 $u \in U$ において正則であるための必要十分条件は，$(d\,f)_u$ が $\mathbf{C}$ 線形写像であることである。

証明　$f = g + ih$，$g, h \in \Omega^0_{U,\mathbf{R}}$ と表して，$\bar{z}$ による偏微分を計算すると

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(u) &= \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(u) + i\frac{\partial h}{\partial x}\Big) + i\Big(\frac{\partial g}{\partial y}(u) + i\frac{\partial h}{\partial y}\Big) \\
&= \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(u) - \frac{\partial h}{\partial y}(u)\Big) + i\Big(\frac{\partial h}{\partial x}(u) + \frac{\partial g}{\partial y}(u)\Big)
\end{aligned}
$$

となる。f が点 $u \in U$ において正則であるならば，コーシー・リーマンの方程式より

$$
\frac{\partial g}{\partial x}(u) = \frac{\partial h}{\partial y}(u), \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(u) = -\frac{\partial h}{\partial x}(u)
$$

が成立するので，先の計算から $(d\,f)_u = (\partial f/\partial z)\,d\,z$ となり，これは $\mathbf{C}$ 線形写像である。逆に $(d\,f)_u$ が $\mathbf{C}$ 線型写像であるとき，$(\partial f/\partial \bar{z})\,d\,\bar{z}$ も $\mathbf{C}$ 線形写像であるが，これは反線形写像でもあるので，

$$i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(u) = i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(u)\,d\,\bar{z}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)_u\Big) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(u)\,d\,\bar{z}\Big(i\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)_u\Big) = -i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(u)$$

となり，$(\partial f/\partial \bar{z})(u) = 0$ であることがわかる。ゆえに g, h がコーシー・リーマンの方程式を満足し，f が u において正則であることが示された。　証明終

文献

[1] Voison, C. (2002). *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I* (L. Schneps, Trans.). Cambridge University Press.

[2] 松本幸夫 (1988). 多様体の基礎. 東京大学出版会.