閉包作用素が定めるマトロイドについて

2025 年 11 月 2 日 16 時 44 分更新

定義 1　E を有限集合とし，$(E, \mathrm{cl}\colon 2^E \to 2^E)$ を M と置くことにする。M が次の四条件 (CL1) から (CL4) を満たすとき，閉包作用素が定める E 上の**マトロイド**と M を呼び，cl をその**閉包作用素**と呼ぶ。

(CL1) E の部分集合 X に対し，$X \subset \mathrm{cl}(X)$ である。

(CL2) E の部分集合 X に対し，$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$ である。

(CL3) E の部分集合 X と Y に対し，$X \subset Y$ ならば $\mathrm{cl}(X) \subset \mathrm{cl}(Y)$ である。

(CL4) E の元 x と E の部分集合 X と $\mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ の元 y に対し，$x \in \mathrm{cl}(X \cup \{y\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ である。

閉包族とフラット族が等しいことを見るのが目標である。

命題 2　閉包作用素が定める E 上のマトロイドと M を考え，

$$\{F \in 2^E : \mathrm{cl}(F) = F\}$$

を $\mathfrak{F}$ と置く。このとき $(E, \mathfrak{F})$ はフラット族が定めるマトロイドである。すなわち

(F1) $E \in \mathfrak{F}$ である。

(F2) $\mathfrak{F}$ の元 F_1 と F_2 に対し，$F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ である。

(F3) $\mathfrak{F}$ の元 F と $E \backslash F$ の元 e に対し，e を含みかつ F を被覆するような $\mathfrak{F}$ の元が存在する。

を $(E, \mathfrak{F})$ が満たす。ここで $\mathfrak{F}$ の元 F と G について，G が F を**被覆する**とは，$F \subsetneq G$ かつ「$F \subsetneq H \subset G,\ H \in \mathfrak{F}$ ならば $H = G$」が成り立つときをいう。

証明　(F1) について。(CL1) より $E \subset \mathrm{cl}(E)$ なので，$E = \mathrm{cl}(E)$ である。ゆえに $E \in \mathfrak{F}$。

(F2) について。F_1 と F_2 を $\mathfrak{F}$ の元とする。すると (CL1) と (CL3) より $F_1 \cap F_2 \subset \mathrm{cl}(F_1 \cap F_2) \subset \mathrm{cl}(F_1) \cap \mathrm{cl}(F_2)$ であり，最右辺は $F_1 \cap F_2$ と等しい。ゆえに $\mathrm{cl}(F_1 \cap F_2) = F_1 \cap F_2$ であり，$F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ が従う。

(F3) について。F を $\mathfrak{F}$ の元，e を $E \setminus F$ の元とする。$\mathrm{cl}(F \cup \{e\})$ を G と置くとき，(CL2) より $G \in \mathfrak{F}$ であり，(CL1) より $e \in G$ かつ $F \subsetneq G$ である。あとは G が F を被覆することを示せば (F3) の成立を確かめられる。$F \subsetneq H \subset G,\ H \in \mathfrak{F}$ とする。$H \setminus F$ の元 x を一つ取ると，$x \in \mathrm{cl}(X \cup \{e\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ であるので，(CL4) より $e \in \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ である。したがって $X \cup \{e\} \subset \mathrm{cl}(X \cup \{x\})$ であるので，

$$\begin{aligned} G &\subset \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X \cup \{x\})) && (\because \text{(CL3) より。}) \\ &= \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) && (\because \text{(CL2) より。}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\subset \mathrm{cl}(H) && (\because \text{(CL2) より。}) \\ &= H && (\because H \in \mathfrak{F} \text{ なので。}) \end{aligned}$$

と計算できるので，$H = G$ である。　　証明終

命題 3　フラット族 $\mathfrak{F}$ が定めるマトロイド M を考え，$\mathrm{cl}\colon 2^E \to 2^E$ を $\mathrm{cl}(X) = \bigcap_{\substack{F \in \mathfrak{F}:\\ X \subset F}} F$ で定める。このとき (E, cl) は閉包作用素が定めるマトロイドである。

証明　(CL1) と (CL3) は定義から直ちに従う。

(CL2) について。(F2) はフラット族が有限交叉で閉じていることを意味しているので，すべての閉包はフラットであることに注意する。（すなわち $\mathrm{cl}(2^E) \subset \mathfrak{F}$ である。）すると E の部分集合 X に対し，$\mathrm{cl}(X) \in \{F \in \mathfrak{F} : X \subset F\}$ となるので，$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) \subset \mathrm{cl}(X)$ であり，(CL3) より逆の包含も成立するので，$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$ である。

(CL4) について。e を E の元，X を E の部分集合，y を $\mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ の元とする。このとき $\mathrm{cl}(X \cup \{x\})$ は，x を含み $\mathrm{cl}(X)$ を被覆するフラットである。なんとなれば，(F3) を用いて x を含み $\mathrm{cl}(X)$ を被覆するフラット G を取ると，$\mathrm{cl}(X) \subsetneq \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \subset G$ となるからである。ここで $y \in \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \cap \mathrm{cl}(X \cup \{y\})$ であるから，$\mathrm{cl}(X) \subsetneq \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \cap \mathrm{cl}(X \cup \{y\})$ である。$\mathrm{cl}(X \cup \{x\})$ が $\mathrm{cl}(X)$ を被覆することから，$\mathrm{cl}(X \cup \{x\}) = \mathrm{cl}(X \cup \{x\}) \cap \mathrm{cl}(X \cup \{y\})$ である。ゆえに $x \in \mathrm{cl}(X \cap \{y\}) \setminus \mathrm{cl}(X)$ である。　　証明終

定理 4　E を有限集合とする。

(1) $\mathrm{cl}\colon 2^E \to 2^E$ を閉包作用素とする E 上のマトロイド M を考え，そのフラット族 $\mathfrak{F}$ が定める的とロイドを M' とする。このとき M' の閉包作用素 cl' が定めるマトロイドは M である。

(2) フラット族 $\mathfrak{F}$ が定める E 上のマトロイド N を考え，その閉包作用素 $\mathrm{cl}\colon 2^E \to 2^E$ が定めるマトロイドを N' とする。このとき N' のフラット族 $\mathfrak{F}'$ が定めるマトロイドは N である。

ゆえに閉包作用素が定めるマトロイドとフラット族が定めるマトロイドは一対一に対応する。

(1) の証明　示すべきことは二つの写像 cl と cl' が等しいことである。E の部分集合 X を勝手に取る。(CL3) より X を包含する $\mathfrak{F}$ の元すべてが $\mathrm{cl}(X)$ を包含するので, $\mathrm{cl}(X) \subset \mathrm{cl}'(X)$ である。また (CL2)より $\mathrm{cl}(X)$ が X を包含する $\mathfrak{F}$ の元であるから，$\mathrm{cl}'(X) \subset \mathrm{cl}(X)$ である。ゆえに $\mathrm{cl}(X) = \mathrm{cl}'(X)$ である。　　証明終

(2) の証明　示すべきことは $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ である。$\mathfrak{F}'$ の元 F を勝手に取ると，$F = \mathrm{cl}(F)$ であり，(F2) より右辺が $\mathfrak{F}$ の元である。ゆえに $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ である。$\mathfrak{F}$ の元 F を考えると，F 自身が F

を包含する $\mathfrak{F}$ の元であるから，$\mathrm{cl}(F) = F$ である。ゆえに $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ であるので，$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ が成り立つ。 証明終