

トロピカルホモロジーに関する書き留め

[1], [2], [3] に基づいて, トロピカルホモロジーの基本事項をまとめることを目的とする。

目次

1	有理多面集合	1
2	局所ホモロジー	2
3	トロピカルホモロジー	4

記法

$\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ有理整数環, 有理数体, 実数体, 複素数体を表す。 R は $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ のいずれかを表す。

1 有理多面集合

n を非負整数とし, 階数 n の格子 N , M と双対対 $\langle \cdot, \cdot \rangle: N \times M \rightarrow \mathbf{Z}$ を考え, $N_R := N \otimes_{\mathbf{Z}} R$, $M_R := M \otimes_{\mathbf{Z}} R$ と置く。例えば, 格子 N に対して $M := \text{hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$ と置き, $\langle x, m \rangle := m(x)$ とすれば双対対を得られる。 N と M の双対対は, R に係数拡大した双対対 $\langle \cdot, \cdot \rangle: N_R \times M_R \rightarrow R$ へ自然に拡張できる。

定義 1 (有理多面集合)

- (1) 元 $m \in M$ と実数 $c \in \mathbf{R}$ に対し, 部分集合 $H_{m,c} := \{x \in N_{\mathbf{R}} : \langle x, m \rangle \geq c\}$ を**有理閉半空間**と呼ぶ。
- (2) $N_{\mathbf{R}}$ 内の**有理多面集合**とは, 少なくとも一つ以上からなる有限個の有理閉半空間の空でない交叉のことをいう。有理多面集合を包含する最小のアフィン部分空間を**アフィン包**と呼ぶ。有理多面集合 σ アフィン包の線型空間を σ の**接空間**と呼び, $\mathbf{L}(\sigma)$ で表す。 $\mathbf{L}(\sigma)$ の線型空間としての次元を σ の**次元**とする。有理多面体 σ のアフィン包内における σ の内部のことを**相対内部**と呼び, $\text{relint}(\sigma)$ で表す。
- (3) σ を有理多面体とする。 $\sigma \subset H_{m,c}$ のとき, $H_{m,c}$ は σ に対して**有効**であるという。 σ に対して $H_{m,c}$ が有効かつ部分集合 $\sigma \cap H_{m,c} \cap H_{-m,c} = \{x \in \sigma : \langle x, c \rangle = c\}$ が空でないとき, この部分集合は有理多面体で, を σ の**面**と呼ぶ。 $m = 0$, $c = 0$ とすれば σ 自身が σ の面であることが分かる。
- (4) 有理多面集合を定める有理閉半空間がすべて $H_{m,0}$ という形をしているとき, その有理多面集合

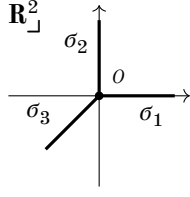


図 1 純次元 1 の扇

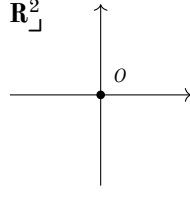


図 2 $\{O\}$ の接空間

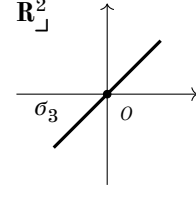


図 3 σ_3 の接空間

を**有理多面錐**と呼ぶ。有理面錐が $\mathbf{R}$ 線形部分空間を含まないとき、**強凸**であるという。

定義 2 (有理多面複体, 有理多面部分空間) $N_{\mathbf{R}}$ 内の有理多面集合の族 Σ が次の二条件を満足するとき**有理多面複体**と呼ぶ。

- (a) $\sigma \in \Sigma$ ならば σ の勝手な面 τ についても $\tau \in \Sigma$ である。
- (b) $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ かつ $\sigma \cap \sigma' \neq \emptyset$ ならば $\sigma \cap \sigma'$ は σ の面である。¹⁾

和集合 $|\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ を Σ の**台**と呼ぶ。有理多面複体の台と等しい部分集合を**有理多面部分空間**と呼び、台を与える複体を**多面構造**と呼ぶ。相対内部の族 $\{\text{relint}(\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ は台 $|\Sigma|$ の分割を与える。包含について極大な有理多面複体の有理多面集合の次元がすべて d であるとき、その有理多面複体が**純次元 d** であるという。有理多面複体 Σ の多面集合がすべて強凸有理多面錐のとき Σ を**扇**と呼ぶ。

例 3 $n = 2$ とし、基底を固定することで $N = \mathbf{Z}^2$, $N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^2$ と思う。 $O = O$, $\sigma_1 = \mathbf{R}_{\geq 0}(1, 0)$, $\sigma_2 = \mathbf{R}_{\geq 0}(0, 1)$, $\sigma_3 = \mathbf{R}_{\geq 0}(-1, -1)$ と置くと、 $\Sigma = \{\{O\}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は純次元 1 の扇である。この扇を図示すると図 1 のようになる。接空間はそれぞれ $\mathbf{L}(\{O\}) = \{O\}$, $\mathbf{L}(\sigma_1) = \mathbf{R}(1, 0)$, $\mathbf{L}(\sigma_2) = \mathbf{R}(0, 1)$, $\mathbf{L}(\sigma_3) = \mathbf{R}(-1, -1)$ である。接空間 $\mathbf{L}(\{O\})$ と $\mathbf{L}(\sigma_3)$ を図示すると図 2, 3 のようになる。この扇が定める有理多面部分空間は**トロピカル基本曲線**と呼ばれる。

2 局所ホモロジー

定義 4 (cf. [1, §2.3], [2, §3.1], [3, §2.1]) $N_{\mathbf{R}}$ 内の有理多面複体 Σ を考える。 p を非負整数とする。

- (1) 多面集合 $\sigma \in \Sigma$ における Σ の R 係数 p 次ホモロジーを

$$\mathcal{F}_p(\sigma; \Sigma; R) := \sum_{\substack{\tau \in \Sigma: \\ \sigma \subset \tau}} \bigwedge^p (\mathbf{L}(\tau) \cap N_{\mathbf{R}}) \quad \left(\subset \bigwedge^p N_{\mathbf{R}} \right)$$

として定める。

- (2) 多面集合 $\sigma \in \Sigma$ における Σ の R 係数 p 次コホモロジーを $\mathcal{F}^p(\sigma; \Sigma; R) := \text{hom}_R(\mathcal{F}_p(\sigma; \Sigma; R), R)$ と定める。ここで、 $\text{hom}_R(\cdot, R)$ が単射準同型を全射準同型に写すので、 $\mathcal{F}_p(\sigma; \Sigma; R)^\perp := \{f \in \bigwedge^p M_R : \text{勝手な } x \in \mathcal{F}_p(\sigma; \Sigma; R) \text{ に対して } f(x) = 0\}$ と置くと、準同型定理によって自然な同型写像

$$\mathcal{F}^p(\sigma; \Sigma; R) \cong \left(\bigwedge^p M_R \right) / (\mathcal{F}_p(\sigma; \Sigma; R)^\perp)$$

1) この条件は $\sigma \cap \sigma'$ が σ' の面であることも要求する。

がある。

上述の (コ) ホモロジーが有理多面複体の台のみに依存する概念であることを見る。

命題 5 有理多面複体 Σ とその細分 Σ' を考え、その台を X と置く。点 $x \in X$ に対し、 x を相対内部に持つ唯一の有理多面体 $\sigma_x \in \Sigma$ 、 $\sigma'_x \in \Sigma'$ を取るとき、勝手な p に対して $\mathcal{F}_p(\sigma_x; \Sigma; R) = \mathcal{F}_p(\sigma'_x; \Sigma'; R)$ が成立する。

証明 σ_x は x を含む Σ の最小な有理多面集合、すなわち $\sigma_x = \bigcap_{\sigma \in \Sigma: x \in \sigma} \sigma$ で、 σ'_x についても同様である。ゆえに、 Σ' が Σ の細分であることと合わせて、 $\sigma'_x \subset \sigma_x$ である。包含 $\mathcal{F}_p(\sigma_x; \Sigma; R) \subset \mathcal{F}_p(\sigma'_x; \Sigma; R)$ を示す。 σ_x を包含する $\tau \in \Sigma$ を取るとき、次元が τ のものと等しい Σ' の有理多面集合によって $\tau = \bigcup_{\tau' \in \Sigma'_{\dim \tau}: \tau' \subset \tau} \tau'$ と表せ、両辺に対して σ'_x との交叉を取ると、 $\sigma'_x = \bigcup_{\tau' \in \Sigma'_{\dim \tau}: \tau' \subset \tau} \tau' \cap \sigma'_x$ となる。このような τ' のうち少なくとも一つについて $\dim(\tau' \cap \sigma'_x) = \dim \sigma'_x$ とならなければならない、 Σ' が複体であることから $\sigma'_x \subset \tau'$ であることが分かる。また τ と τ' の次元が等しいので、 $\mathbf{L}(\tau) = \mathbf{L}(\tau')$ となる。このことから $\mathcal{F}_p(\sigma_x; \Sigma; R) \subset \mathcal{F}_p(\sigma'_x; \Sigma; R)$ の成立が従う。逆の包含 $\mathcal{F}_p(\sigma'_x; \Sigma; R) \subset \mathcal{F}_p(\sigma_x; \Sigma; R)$ を示す。 σ'_x を包含する $\tau' \in \Sigma'$ を取ると、 Σ' が Σ の細分であることから、 $\tau' \subset \tau$ なる $\tau \in \Sigma$ が存在し、この有理多面集合に対して $\mathbf{L}(\tau') \subset \mathbf{L}(\tau)$ 、したがって $\bigwedge^p \mathbf{L}(\tau') \subset \bigwedge^p \mathbf{L}(\tau)$ である。さらに、 σ_x は x を含む Σ の最小な多面集合であるから、 $\sigma_x \subset \tau$ である。ゆえに包含 $\mathcal{F}_p(\sigma_x; \Sigma; R) \supset \mathcal{F}_p(\sigma'_x; \Sigma; R)$ が成立する。 証明終

定義 6 X を有理多面部分空間とし、その多面構造 Σ を一つ取る。点 $x \in X$ に対し、 $\mathcal{F}_p(x; X; R) := \mathcal{F}_p(\sigma_x; \Sigma; R)$ 、 $\mathcal{F}^p(x; X; R) := \mathcal{F}^p(\sigma_x; \Sigma; R)$ と定める。他の X 上の有理多面複体 Σ' を取るとき、 Σ と Σ' の共通細分 $\Sigma'' = \{\sigma \cap \sigma' : \sigma \in \Sigma, \sigma' \in \Sigma'\}$ をとることで、命題 5 から

$$\mathcal{F}_p(\sigma_x; \Sigma; R) = \mathcal{F}_p(\sigma''_x; \Sigma''; R) = \mathcal{F}_p(\sigma'_x; \Sigma'; R)$$

となるので、上述の定義は、有理多面複体の構造に依らないという意味で well-defined である。

例 7 例 3 の設定を引き継ぎ、トロピカル基本曲線 X とその多面構造 Σ を考える。接空間は高々 1 次元であるから、 $p \geq 2$ のとき $\mathcal{F}_p(x; X; R) = 0$ である。また $p = 0$ のときは零次外冪となるので、 $\mathcal{F}_0(x; X; R) = R$ である。 $p = 1$ のとき、

$$\mathcal{F}_1(O; X; R) = \mathcal{F}_1(\{O\}; X; R) = R(1, 0) + R(0, 1) + R(-1, -1) = R^2$$

となるのに対し、勝手な正数 ε について $\mathcal{F}_1((\varepsilon, 0); X; R) = \mathcal{F}_1(\sigma_1; X; R) = R(1, 0)$ である。定義から $\mathcal{F}^1(O; X; R) = \text{hom}_R(R^2, R)$ 、 $\mathcal{F}^1((\varepsilon, 0); X; R) = \text{hom}_R(R(1, 0), R)$ である。

トロピカルホモロジーを定義する際に必要となる次の補題を用意してこの節を終える。

補題 8 Σ を有理多面複体とする。 $\tau \subset \sigma$ なる $\sigma, \tau \in \Sigma$ に対して、包含 $\mathcal{F}_p(\sigma; \Sigma; R) \subset \mathcal{F}_p(\tau; \Sigma; R)$ が成立する。

証明 σ を包含する Σ の有理多面集合は τ も包含するので、

$$\mathcal{F}_p(\sigma; \Sigma; R) = \sum_{\substack{\gamma \in \Sigma: \\ \sigma \subset \gamma}} \bigwedge^p (\mathbf{L}(\gamma) \cap N_R) \subset \sum_{\substack{\gamma \in \Sigma: \\ \tau \subset \gamma}} \bigwedge^p (\mathbf{L}(\gamma) \cap N_R) = \mathcal{F}_p(\tau; \Sigma; R)$$

である。

証明終

3 トロピカルホモロジー

p, q を非負整数とする。 Δ^q を q 次元単体とする。

定義 9 (cf. [1, §2.5], [2, Definition 3.4], [3, §2.1]) 有理多面部分空間 X とその多面構造 Σ を考える。

(1) 有理多面集合 $\sigma \in \Sigma$ に対して, 集合

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \text{ は連続写像 } \Delta^q \rightarrow \sigma \text{ で, } \Delta^q \text{ の勝手な面の相対内部の } \delta \text{ における像が} \\ \sigma \text{ の面の相対内部に包含される} \end{array} \right\}$$

を基底とする R 自由加群を $C_q(\sigma; R)$ と置く。通常の境界写像は R 上の準同型写像

$$\partial: C_q(\sigma; R) \rightarrow \bigoplus_{\tau \in \Sigma: \tau \subset \sigma} C_q(\tau; R) \quad (3.1)$$

を誘導する。

(2) 鎖複体 $(C_*(\Sigma; \mathcal{F}_p; R), \partial)$ を次のように定める。各 q における R 加群を $C_q(\Sigma; \mathcal{F}_p; R) := \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} (C_q(\sigma; R) \otimes_R \mathcal{F}_p(\sigma; \Sigma; R))$ で定める。補題 8 によって準同型写像 (3.1) は $\partial: C_q(\Sigma; \mathcal{F}_p; R) \rightarrow C_{q-1}(\Sigma; \mathcal{F}_p; R)$ に拡張し, 定義からこれら写像は $\partial \circ \partial = 0$ を満足し, 鎖写像である。この鎖複体の余鎖複体を $(C^*(\Sigma; \mathcal{F}^p; R), d)$ と置く。

(3) (p, q) 次トロピカルホモロジー $H_{p,q}^{\text{Trop}}(\Sigma; R)$ を, 鎖複体 $(C_*(\Sigma; \mathcal{F}_p; R), \partial)$ の q 次ホモロジー群として定める。 (p, q) 次トロピカルコホモロジー $H_{\text{Trop}}^{p,q}(\Sigma; R)$ を, 余鎖複体 $(C^*(\Sigma; \mathcal{F}^p; R), d)$ の q 次コホモロジー群として定める。



文献

- [1] Itenberg, I., Katzarkov, L., Mikhalkin, G., & Zharkov, I. (2019). Tropical Homology. *Math. Ann.*, 374, 963–1006. <https://doi.org/10.1007/s00208-018-1685-9>
- [2] Jell, P., Shaw, K., & Smacka, J. (2019). Superforms, tropical cohomology, and Poincaré duality. *Adv. Geom.*, 19(1), 101–130. <https://doi.org/10.1515/advgeom-2018-0006>
- [3] Mikhalkin, G., & Zharkov, I. (2014). Tropical Eigenwave and Intermediate Jacobians. In Castano-Bernard, R., Catanese, F., Kontsevich, M., Pantev, T., Soibelman, Y., & Zharkov, I. (Eds.), *Homological Mirror Symmetry and Tropical Geometry. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*, (vol. 15, pp. 309–349). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06514-4_7